

## **Introdução às variáveis regionalizadas**

«TÉCNICA»

REVISTA DE ENGENHARIA

Separata do n.º 451/452, págs. 89 a 96

LISBOA

ASSOCIAÇÃO DOS ESTUDANTES  
DO  
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

1979

# Introdução às variáveis regionalizadas

HENRIQUE GARCIA PEREIRA

Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior Técnico (CVRMUL)

## RESUMO

Introduz-se a noção de Variável Regionalizada no seu duplo aspecto aleatório e estrutural. Dão-se exemplos de Variáveis Regionalizadas nos domínios geológico e mineiro e sugere-se, em Referências Bibliográficas existentes no CVRMUL, outras aplicações. Interpretam-se as Variáveis Regionalizadas como realização de uma Função Aleatória e introduzem-se hipóteses restritivas. Define-se o variograma como instrumento básico da Geoestatística e estudam-se algumas das suas propriedades como revelador de estruturas.

Indica-se o método de cálculo do variograma experimental e listam-se alguns modelos teóricos ajustáveis.

## ABSTRACT

The theory of Regionalized Variables is introduced by its structural and random features. Examples of the variables in the geological and mining fields are presented and other applications are suggested. The Regionalized Variables are studied as a realization of Random Functions and work hypothesis are introduced. The variogram is defined as the basic tool of Geostatistics and some of its applications as structure depictor are discussed.

The method for experimental variogram calculation is described and some theoretical models are adjusted.

## ÍNDICE

1. GENERALIDADES
2. AS VARIÁVEIS REGIONALIZADAS COMO REALIZAÇÃO DE UMA FUNÇÃO ALEATÓRIA
3. HIPÓTESES RESTRITIVAS
4. VARIOGRAMA
  - 4.1. Introdução
  - 4.2. Fenómenos de transição
  - 4.3. Anisotropias
  - 4.4. Comportamento na origem
  - 4.5. Construção do variograma experimental
  - 4.6. Ajustamento de um modelo teórico
5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

### 1 — GENERALIDADES

Nas Ciências da Terra surge um tipo de variáveis distribuídas no espaço e que apresentam uma certa estrutura.

Se for  $x$  a coordenada (\*) do ponto do espaço

a que se refere a variável,  $Y(x)$  designa o valor que a variável toma nesse ponto.

Por exemplo, o teor ao longo de uma sondagem é uma Variável Regionalizada (V. R.).

Estas variáveis apresentam-se segundo um duplo aspecto contraditório: têm uma característica *aleatória* que se manifesta na irregularidade e variação imprevisível de um ponto para outro e uma característica *estruturada* que reflecte as ligações existentes entre os pontos do espaço onde o fenómeno mineralizado ocorreu.

As variáveis regionalizadas não podem ser tratadas pela estatística clássica (Bernoulliana) visto que esta implica que:

1. As provas possam ser indefinidamente repetidas
2. As provas são independentes (o resultado de uma prova não pode ser influenciado pelo das que a precederam).

Ora estas condições não são respeitadas nas variáveis tratadas nas Ciências da Terra: tirando uma amostra num ponto de coordenada  $x$ , o teor de tal

(\*) Em tudo o que se segue,  $x$  é a coordenada a 1, 2 ou 3 dimensões.

amostra é um valor *único*, fisicamente determinado, e não é possível voltar a repetir a experiência. No entanto, se tirarmos outra amostra num ponto infinitamente vizinho, poder-se-ia dizer que a condição 1. era respeitada numa certa vizinhança, mas a condição 2. deixava de o ser, visto que, se a primeira amostra fosse tirada numa zona rica, havia tendência, em média, para que a segunda tivesse também um teor elevado.

Por outro lado, um aspecto fundamental das V. R. que é a *continuidade* do fenómeno mineralizado, isto é, o modo mais ou menos regular como estas evoluem no espaço, não pode ser tomada em conta pela estatística clássica.

De facto, consideremos o seguinte exemplo de amostras de solo retiradas ao longo de 2 linhas a intervalos regulares e suponhamos que a variável que nos interessava era a percentagem de água nessas amostras. Os resultados são indicados na tabela seguinte:

linha A	5	10	15	20	25	20	15	10	5
linha B	10	25	15	10	20	5	15	5	20

Do ponto de vista da estatística clássica, as amostras tiradas na linha A não diferem das tiradas na linha B — têm a mesma média, variância, momentos de ordem superior, histograma, etc. No entanto, do ponto de vista da distribuição do teor da água no solo é intuitivo que as duas sequências são profundamente diferentes e portanto há um carácter nas V. R. que tem de ser tomado em conta através de outra ferramenta que não a estatística clássica.

Algumas características qualitativas das variáveis regionalizadas são comentadas seguidamente:

a) **Localização** — a V. R. está definida numa determinada região do espaço à qual se chama *campo geométrico* que pode ser uma formação geológica, por exemplo, um jazigo em que as variáveis têm um conjunto de ligações entre elas dado pela própria génese (fenómeno estruturante). Mas na prática a V. R. não é uma função pontual — é o valor médio numa amostra de dimensões finitas, perfeitamente determinadas. O domínio onde a V. R. é medida designa-se por *suporte*. Para um teor, por exemplo, o suporte é o volume da amostra onde este foi analisado. Se se muda o suporte, obtém-se outra regionalização diferente da primeira até do ponto de vista da estatística clássica. O histograma das carottes de sondagem apresentará sempre dispersão maior (maior variância) do que o histograma de blocos de algumas toneladas (Fig. 1).

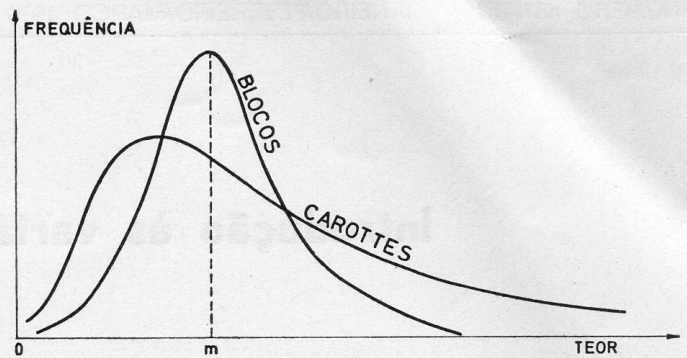
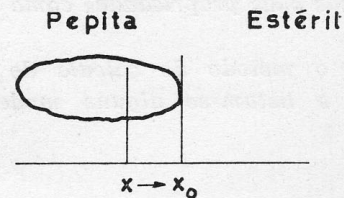


Fig. 1

b) **Continuidade** — é a variação espacial da V. R. Apesar da complexidade das flutuações verificadas existe em geral continuidade em média. Esta define-se por

$$\lim_{x \rightarrow x_0} E\{Y(x) - Y(x_0)\} = 0$$

Há casos em que tal continuidade não se verifica e então o limite  $C_0 \neq 0$  para o qual tende a diferença dos quadrados da variável quando os pontos se aproximam indefinidamente é o chamado *efeito de pepita*. De facto, na fronteira de uma pepita existe descontinuidade:



$$\lim_{x \rightarrow x_0} [Y(x) - Y(x_0)]^2 = C_0 \neq 0$$

c) — **Anisotropias** — em certos casos, ligados a fenómenos geológicos particulares, a continuidade numa determinada direcção pode ser diferente da que se verifica noutra direcção. Ao longo de uma mesma camada sedimentar é de esperar uma variação muito mais regular do que na direcção perpendicular.

d) **Fenómenos de transição** — No interior do campo geométrico da variável, podem surgir estruturas particulares como sejam conjuntos lenticulares em que existe continuidade no interior de cada unidade e variação brusca de unidade para unidade (Fig. 2).

Este conjunto complexo de descontinuidades realiza uma partição do espaço mineralizado em compartimentos mais ou menos independentes (\*). É de es-

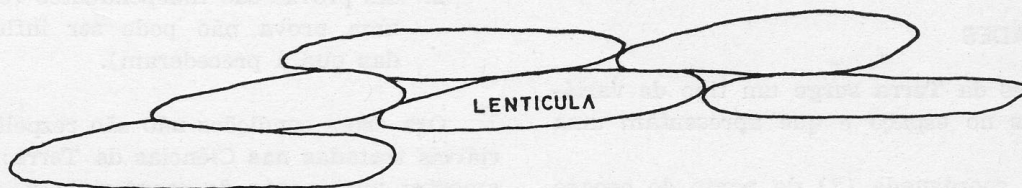


Fig. 2

(\*) Corresponde, por exemplo, a micro-bacias de sedimentação onde as condições de deposição evoluíram de um modo mais ou menos autónomo.

perar que o sistema de relações entre a V. R. no interior de cada lenticula seja mais «forte» do que quando se passa de uma para outra. Esta estrutura que conduz a que, a partir de uma certa distância, haja independência entre as V. R., é designada por Fenómeno de Transição.

★  
★★

A teoria das Variáveis Regionalizadas foi desenvolvida a partir dos trabalhos de Matheron [1], [2].

A aplicação desta teoria a problemas mineiros, em especial cálculo de reservas e planeamento da exploração, designa-se por Geoestatística.

Um resumo do formalismo e campos de aplicação da Geoestatística encontram-se em [3], [4], [5], [6] que constituem guias práticos de utilidade para um primeiro approach dos problemas levantados pela aplicação da teoria das Variáveis Regionalizadas no domínio mineiro.

Considerações gerais sobre a utilidade da Geoestatística do ponto de vista da empresa mineira (utilização como instrumento de decisão económica) encontram-se brevemente explanadas em [7], [8], [9] e [10].

Como exemplo de Variáveis Regionalizadas, teremos, como primeiro caso clássico, o teor num determinado elemento numa amostra localizada no espaço de coordenada  $x$ . De facto, o teor apresenta uma evolução errática de ponto para ponto do espaço, mas será de esperar que teores em pontos vizinhos tenham mais relação entre si do que teores em pontos muito afastados. Ao aspecto aleatório, sobrepõe-se a estrutura do fenómeno mineralizado que dá uma certa unidade ao conjunto de variáveis medidas no campo geométrico que é a jazida.

A *possança* mineralizada é também uma V. R.

Variáveis de tratamento como *rendimentos* são também V. R. pois a aptidão ao tratamento depende de características intrínsecas do minério que se desenvolvem no espaço de uma certa maneira, dependente do fenómeno mineralizado.

Além destas variáveis «mineiras» (cuja aplicação no cálculo de reservas é imediata) existem muitas outras que podem ser tratadas como V. R.

Por exemplo, o *estado de fracturação de um mármore*, definido como a superfície total de fracturas por unidade de volume é objecto de um tratamento geoestatístico em [11].

Na *prospecção geoquímica*, a dimensão e variabilidade das amostras colhidas para estudar a distribuição de determinado elemento no espaço (homogeneidade, dispersão, anisotropias, técnicas de amostragem e «mapping») são aplicações típicas da teoria das V. R. [12].

Em *hidrogeologia e pluviometria*, a altura piezométrica num determinado ponto de um aquífero ou a quantidade de precipitação que cai num determinado ponto de medida podem ser tomadas também como V. R. [13], [14].

Em geofísica, em particular na interpretação de dados *gravimétricos* [15], mas também em *meteorologia*,

em que se pretende tomar em conta a relação entre a pressão e a velocidade dos ventos [14], a teoria das V. R. tem-se revelado como instrumento poderoso de interpretação e previsão.

A determinação de cartas dos *fundos submarinos* é também um caso em que a cota medida num determinado ponto pode ser tomada como V. R. [14].

Em problemas de controle da poluição [16] e outros um pouco fora do âmbito deste trabalho (densidade de árvores numa floresta, distribuição geográfica da população e actividades económicas) também a teoria da V. R. pode ter aplicação útil.

*EM RESUMO, qualquer variável dependente do espaço, em que, para além de um carácter aleatório, existe um sistema de relações entre os valores tomados em pontos distanciados de um vector  $\vec{h}$  (e esse sistema de relações não pode ser interpretado de um modo simples a partir de uma função que descreva uma realidade «física») pode ser tratada como Variável Regionalizada e sofrer uma análise segundo o formalismo desenvolvido pela Geoestatística.*

## 2 — AS VARIÁVEIS REGIONALIZADAS COMO REALIZAÇÃO DE UMA FUNÇÃO ALEATÓRIA

Para interpretar o duplo aspecto aleatório e estrutural das V. R. utiliza-se a noção de Função Aleatória (F. A.).

Uma F. A. é uma variável aleatória a uma infinidade de componentes.

Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n$  as coordenadas dos pontos do espaço onde se realizam medidas das V. R. Os valores  $Y(x_1), Y(x_2), \dots, Y(x_n)$  — valores que a V. R. toma nesses pontos — podem considerar-se como uma realização particular de uma F. A. a  $n$  componentes, isto é, como *um* dos resultados possíveis de uma tiragem à sorte da F. A. Se fosse possível repetir a experiência, obter-se-ia outras realizações da mesma F. A. cuja lei de distribuição de probabilidade a  $n$  componentes seria  $f[Y(x_1), Y(x_2), \dots, Y(x_n)]$ .

Como a partir de uma única realização de uma variável aleatória ordinária (um número tirado ao acaso) não é possível inferir a lei de distribuição dessa variável, também aqui a lei de distribuição de probabilidade a  $n$  componentes não se pode determinar.

Exige-se assim a introdução de hipóteses restritivas.

## 4 — HIPÓTESES RESTRITIVAS

Para ultrapassar a dificuldade acima enunciada podem formular-se algumas hipóteses restritivas.

a) Estacionaridade — A F. A. é estacionária se a sua lei de distribuição de probabilidade é invariante por translacção, isto é a F. A.

$[Y(x_1), Y(x_2), \dots, Y(x_n)]$  tem a mesma lei de distribuição de probabilidade do que

$$[Y(x_1+h), Y(x_2+h), \dots, Y(x_n+h)]$$

neste caso  $E\{Y(x)\} = m(x) = E\{Y(x+h)\} = m = c^*$  portanto a média é invariante por translação e pode ser tomada como nula.

- b) Estacionaridade de 2.ª ordem.
- Se a covariância

$$K(h) = E\{Y(x+h) \cdot Y(x)\} - m(x)^2$$

não depende de  $x$  (isto é, do ponto de apoio) e só da distância que liga os dois pontos entre os quais é calculada, diz-se que há estacionaridade de 2.ª ordem.

Esta hipótese implica a existência da variância

$$K(0) = E\{Y(x)^2\} - m(x)^2$$

finita, o que nem sempre se verifica (\*).

- c) Hipótese intrínseca.

Consideremos os incrementos  $[Y(x+h) - Y(x)]$  e admitamos que estes são estacionários, isto é, não dependem de  $x$ .

Então

$$E\{[Y(x+h) - Y(x)]\} = m(h) \quad \text{deriva linear (que se pode supor nula)}$$

$$E\{[Y(x+h) - Y(x)]^2\} = 2 \gamma(h) \quad \text{variograma}$$

No caso da hipótese intrínseca, o variograma  $\gamma(h)$  é independente do ponto de apoio e portanto é suficiente para definir a estrutura da V. R. no espaço em que a estacionaridade se verifica.

Estas hipóteses *a*), *b*) e *c*) são sucessivamente mais fracas e devem ser testadas para investigar se num determinado campo se verificam. É esta precisamente a dificuldade inicial do técnico de geoestatística aplicada — determinação de um variograma único para todo o espaço que pretende tratar (ou a partição do espaço em zonas em que a estacionaridade, tal como se definiu para a hipótese intrínseca, seja válida).

De facto, para que o fenómeno geológico admita a hipótese intrínseca, é necessário que o sistema de correlações entre pontos do espaço só dependa da distância e não da zona de trabalho (medida pela coordenada  $x$ ). Isto implica que o fenómeno geológico tenha agido de um modo «aproximadamente» constante para a zona onde se pretende estimar o variograma e que a *escala* da rede de amostragem «acerte» com a escala em que o fenómeno revela a estacionaridade (\*).

Mas há fenómenos que, seja qual for a escala de trabalho, nunca apresentam estacionaridade. Um fenómeno governado pela gravidade (o teor aumenta

sempre em profundidade, por exemplo) não pode evidentemente sofrer o tratamento da geoestatística estacionária. Para tais casos, a Krigagem Universal [18] é a metodologia a utilizar. Vamos no entanto cingir-nos, neste trabalho, ao caso em que a estacionaridade, mesmo local, pode ser detectada.

## 4 — VARIOGRAMA

### 4.1 — Introdução

O variograma é o instrumento básico da geoestatística. É a partir desta função que todas as estimações são efectuadas e afectadas de um erro. Por outro lado, é um poderoso revelador de estruturas. É neste último aspecto que o variograma vai ser considerado neste trabalho.

Num determinado campo geométrico, consideremos o valor que a variável regionalizada toma em dois pontos  $x$  e  $x + \vec{h}$ , onde  $\vec{h}$  é um vector.

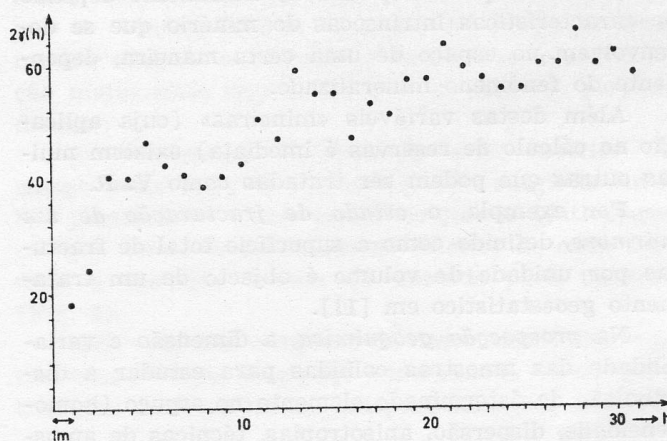
Na hipótese intrínseca, o variograma não depende do ponto de apoio e pode ser calculado para qualquer região do espaço.

É portanto o valor médio do quadrado das diferenças entre todos os pares de pontos existentes no campo geométrico distanciados de  $\vec{h}$ .

Na prática, é necessário que o número de pontos amostrados seja suficiente para que a *média* tenha significado estatístico.

### 4.2 — Fenómenos de transição

O variograma, nos fenómenos de transição, apresenta-se com o aspecto da figura seguinte (variograma do teor em Cu num jazigo sedimentar):



Variograma dos teores em Cu (segundo [19])

(\*) Um estudo experimental realizado por Krige [9], [17] verificou que a variância de uma amostra num campo sucessivamente crescente (até atingir todo o jazigo do Rand), aumentava indefinidamente segundo  $\sigma^2(v/v) = \alpha \log(v/v)$  e portanto não há garantia de que exista variância a priori finita. Sendo  $v$  a dimensão da amostra e  $v$  a dimensão do campo onde a variância  $\sigma^2(v/v)$  é calculada, verifica-se que  $\lim_{v \rightarrow \infty} \sigma^2(v/v) = \infty$ .

(\*) É neste aspecto que a informação geológica é muito útil na formulação dos modelos geoestatísticos. A interdependência entre as observações de campo e o tratamento matemático deve ser constante.

Na maioria dos casos práticos, há um ramo crescente do variograma para valores pequenos de  $h$  e a partir de uma certa distância, este tende para um patamar. Este facto é interpretado teoricamente a partir da estacionaridade de 2.ª ordem:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E \left\{ [Y(x+h) - Y(x)]^2 \right\}$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E \left\{ [Y(x+h)]^2 \right\} - E \left\{ Y(x+h) \cdot Y(x) \right\} + \frac{1}{2} E \left\{ [Y(x)]^2 \right\}$$

em virtude da estacionaridade de 2.ª ordem,

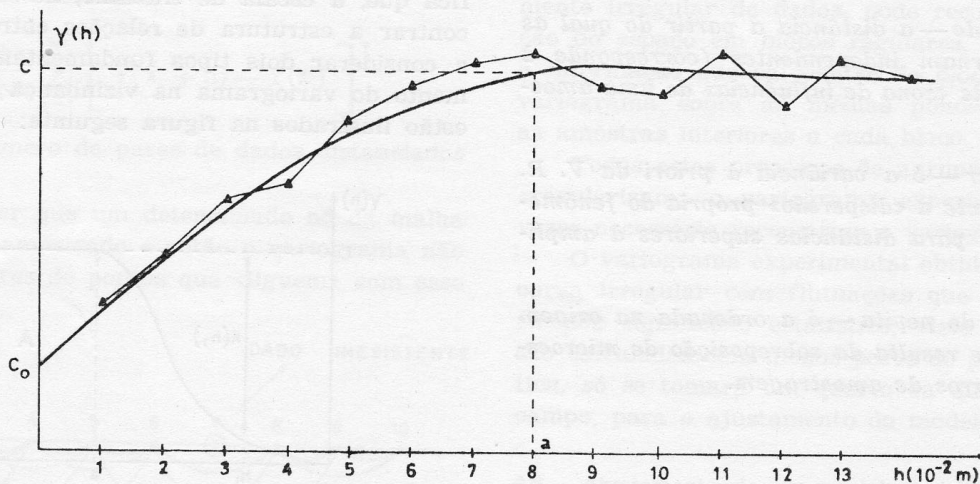
$$E\{[Y(x+h)]^2\} = E\{[Y(x)]^2\} = K(o)$$

$$\gamma(h) = K(o) - K(h)$$

Nos fenómenos de transição, a partir de uma certa distância  $a$ , dita *amplitude*, a covariância  $K(h)$  anula-se e o variograma reduz-se ao patamar  $C$  que coincide portanto com a variância à priori.

Outro parâmetro característico do variograma é o efeito de pepita  $C_0$ , que corresponde à ordenada na origem.

É o caso que se apresenta na figura seguinte, correspondente às espessuras mineralizadas de um jazigo sedimentar de Ferro:



O efeito de pepita pode ser interpretado como o «testemunho» de micro-regionalizações existentes a escalas inferiores à de amostragem. De facto, o primeiro ponto a que temos acesso experimental é  $\gamma(1)$  e não se sabe o andamento do variograma entre os pontos 0 e 1; apenas se pode extrapolar linearmente para o eixo das ordenadas.

Suponhamos o caso ilustrado na Fig. 3.

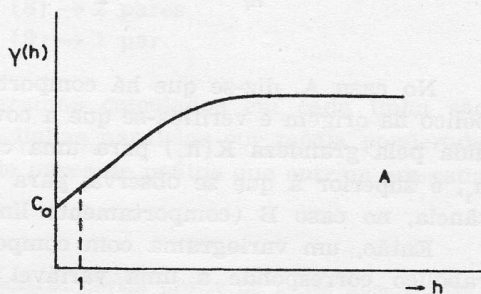
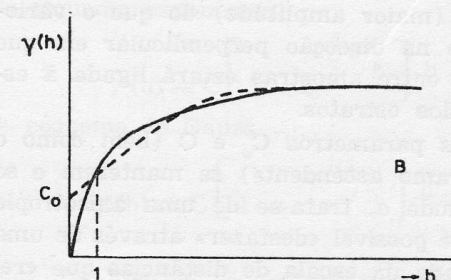


Fig. 3



Fig. 4



O variograma A foi construído a partir de amostras cuja distância mínima era 1. Se for apertada a malha de amostragem, poder-se-ia revelar o variograma B que corresponde à sobreposição de uma transição a pequena escala (com o seu patamar) com a transição à escala da 1.ª amostragem. Além deste aspecto («testemunho» de microregionalização), o efeito de pepita reflecte ainda os erros de amostragem. De facto, se fosse possível realizar a colheita de outra amostra no mesmo ponto  $x$ , essa amostra daria um valor para a V. R.  $Y'$  diferente do inicial devido aos erros de amostragem, analíticos, etc. Portanto, duas amostras infinitamente próximas podem contribuir para o termo  $[Y(x+h) - Y(x)]^2$  apenas pelos erros de amostragem.

Outro aspecto importante da mineralização revelado pelo variograma é a presença de *estruturas embricadas* e corresponde ao caso ilustrado na Fig. 5 para o variograma global da acumulação (teor x espessura) de um jazigo de Au.

Este caso corresponde ao facto de a malha de reconhecimento utilizada ter «surpreendido» simultaneamente duas estruturas de transição embricadas segundo o esquema da Fig. 4:

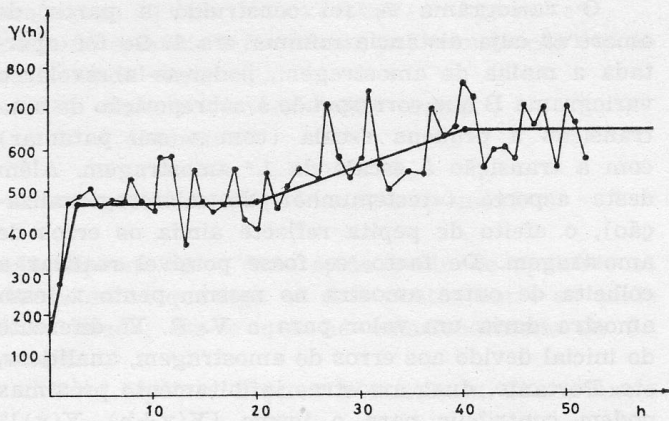


Fig. 5

O problema da escala encontra-se aqui de novo: para pequenas distâncias, o variograma reflecte a transição a essa escala (no interior das lenticulas) e para distâncias superiores à dimensão média das lenticulas, o variograma reflecte o modo como estas se estruturam entre si.

Em resumo, num fenómeno de transição, os parâmetros de que depende o variograma são:

*a* — amplitude — a distância a partir da qual as amostras se tornam independentes (corresponde à noção intuitiva de «zona de influência» de uma amostra).

*C* — patamar — é a variância a priori da V. R. estudada e reflecte a «dispersão» própria do fenómeno mineralizado para distâncias superiores à amplitude.

$C_0$  — efeito de pepita — é a ordenada na origem do variograma e resulta da sobreposição de microestruturas e de erros de amostragem.

#### 4.3 — Anisotropias

Visto que o variograma depende da direcção em que é calculado, podem surgir andamentos diferentes conforme a direcção. É este aspecto do variograma como revelador de anisotropia que dá a informação sobre a variação das estruturas presentes com a direcção.

Na Fig. 6 está esquematizada uma anisotropia que se verifica numa jazida de fosfatos.

Num jazigo estratiforme é de esperar que o variograma calculado no sentido da estratificação seja muito diferente (maior amplitude) do que o variograma calculado na direcção perpendicular em que a independência entre amostras estará ligada à espessura média dos estratos.

No caso dos parâmetros  $C_0$  e *C* (bem como o andamento do ramo ascendente) se manterem e só variar a amplitude *a*, trata-se de uma anisotropia geométrica que é possível «desfazer» através de uma mudança adequada da escala de distâncias que «reproduza» o esquema isótropo.

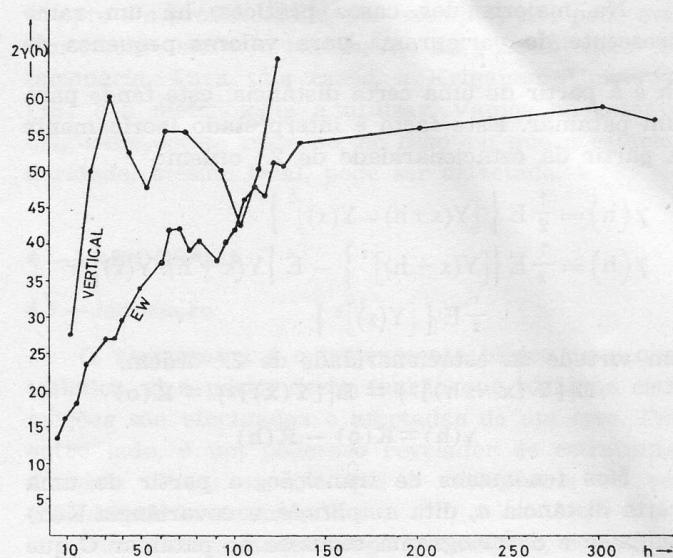
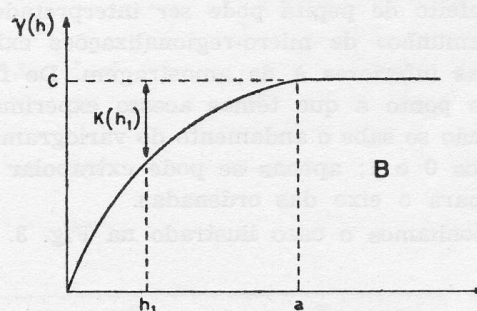
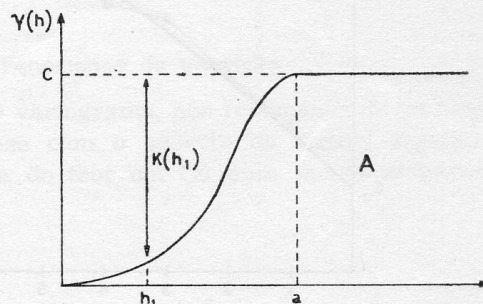


Fig. 6

#### 4.4 — Comportamento na origem

Para além do caso em que o variograma se reduz a flutuações em torno de um patamar (o que significa que, à escala de trabalho, não foi possível encontrar a estrutura de relações entre a V. R.), há a considerar dois tipos fundamentais de comportamento do variograma na vizinhança da origem, que estão ilustrados na figura seguinte:



No caso A, diz-se que há comportamento parabólico na origem e verifica-se que a covariância, medida pela grandeza  $K(h_1)$  para uma certa distância  $h_1$ , é superior à que se observa, para a mesma distância, no caso B (comportamento linear).

Então, um variograma com comportamento parabólico corresponde a uma variável mais regular no espaço do que um variograma com comporta-

mento linear. A covariância dissipa-se mais rapidamente no caso B para as pequenas distâncias, embora a amplitude possa ser a mesma. O caso A corresponde a uma variável como as espessuras de uma camada sedimentar, enquanto B corresponde aos teores de um elemento num suporte constante.

#### 4.5 — Construção do variograma experimental

Perante os dados experimentais de que se dispõe, a primeira tarefa que é necessário sempre efectuar é uma crítica cuidadosa do modo como a amostragem foi efectuada. Esta crítica exige uma definição correcta da V. R. que se pretende estudar, o seu suporte e a sua distribuição «macroscópica» no espaço (possibilidade de «viés» por concentração de dados numa certa zona, exame de valores aberrantes, homogeneidade dos dados (\*)).

Um variograma só tem sentido quando calculado sobre variáveis de suporte constante. As variáveis devem ser aditivas para que valores médios se possam calcular (teores em espessuras variáveis são transformados em acumulações, por exemplo).

No caso das amostras estarem alinhadas e segundo uma malha regular, o variograma calcula-se simplesmente pela fórmula

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N'} \sum_{i=1}^{N'} \left[ Y(x_i + h) - Y(x_i) \right]^2$$

onde  $N'$  é o número de pares de dados distanciados de  $h$ .

Podem suceder que um determinado nó da malha não tenha sido amostrado e então o variograma não considera os pares de pontos que «liguem» com esse ponto (Fig. 7).

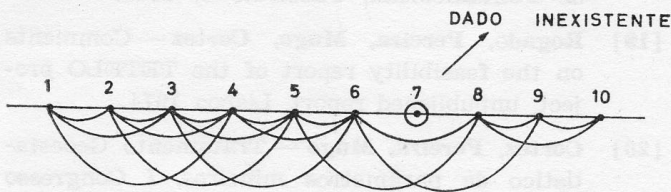


Fig. 7

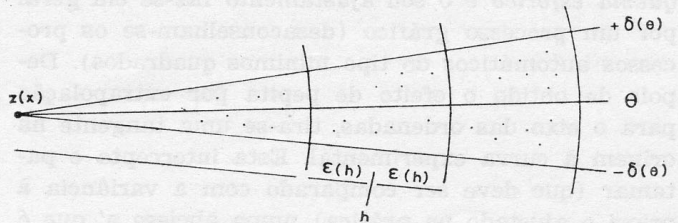
- $\gamma(1) \rightarrow 7$  pares
- $\gamma(2) \rightarrow 6$  pares
- $\gamma(3) \rightarrow 5$  pares
- $\gamma(4) \rightarrow 5$  pares
- $\gamma(5) \rightarrow 4$  pares
- $\gamma(6) \rightarrow 3$  pares
- $\gamma(7) \rightarrow 3$  pares
- $\gamma(8) \rightarrow 2$  pares
- $\gamma(9) \rightarrow 1$  par

Os variogramas calculados em cada linha são agrupados em linhas paralelas por média ponderada pelo número de pares de pontos que entram em cada linha.

(\*) As amostras devem provir de zonas homogêneas da jazida. Por exemplo, não se tratará simultaneamente a parte oxidada e os sulfuretos de um jazigo de cobre.

No caso dos dados estarem alinhados mas a malha de amostragem não ser regular, definem-se classes de distância  $\varepsilon(h)$  e tomam-se-ão todos os pares de pontos distantes de  $h \pm \varepsilon(h)$  para a estimação de  $\gamma(h)$ .  $\varepsilon(h)$  será menor para as pequenas distâncias.

No caso de dados aleatoriamente distribuídos no plano, faz-se um agrupamento por classes de ângulos. Para a construção do variograma na direcção  $\theta$  e para o passo  $h$ , cada valor  $z(h)$  é associado com todos os que caíem, para a distância  $h \pm \varepsilon(h)$ , no ângulo  $\theta \pm \delta(\theta)$ .



Evidentemente que a prática ditará as classes de distância e de ângulos a considerar em cada caso concreto.

No caso extremo em que os processos precedentes não se adaptam a uma configuração extremamente irregular de dados, pode recorrer-se à partição do espaço em blocos regulares, agrupando toda a informação que cai dentro do bloco e calculado o variograma sobre as médias ponderadas de todas as amostras interiores a cada bloco.

Todos estes processos de agrupamento de dados «regularizam» o variograma experimental e é por vezes necessário reconstruir o variograma real.

O variograma experimental obtido é sempre uma curva irregular com flutuações que crescem com  $h$  (menor significado estatístico, visto que as médias são calculadas com menos pares de pontos). Na prática, só se tomará um quarto da dimensão total do campo, para o ajustamento do modelo teórico.

#### 4.6 — Ajustamento de um modelo teórico

Os modelos teóricos de que se dispõe na maioria dos casos práticos reduzem-se aos seguintes tipos:

##### a) esquemas com patamar

— esquema esférico

$$\gamma(h) = \begin{cases} C \left[ \frac{3h}{2a} - \frac{h^3}{2a^3} \right] & h \leq a \\ C & h > a \end{cases}$$

— esquema exponencial

$$\gamma(h) = C \left[ 1 - e^{-h/a} \right] \quad h \geq 0$$

— esquema de Gauss

$$\gamma(h) = C \left[ 1 - e^{-h^2/a^2} \right] \quad h \geq 0$$



b) *esquemas sem patamar*

— esquema linear

$$\gamma(h) = p h$$

— esquema logarítmico (de Wijs)

$$\gamma(h) = A \log h \quad h \geq a$$

O variograma mais utilizado na prática é o *esquema esférico* e o seu ajustamento faz-se em geral por um processo gráfico (desaconselham-se os processos automáticos do tipo mínimos quadrados). Depois de obtido o efeito de pepita por extrapolação para o eixo das ordenadas, tira-se uma tangente na origem à curva experimental. Esta intercepta o patamar (que deve ser comparado com a variância a priori e ajustado na prática) numa abcissa  $a'$  que é  $\frac{2}{3}$  da amplitude  $a$ .

O esquema fica assim definido conhecendo  $C$ ,  $C_0$  e  $a$ .

## 5 — REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] **Matheron** — Les Variables Régionalisées et leur estimation, Masson & Cie, Paris, 1965.
- [2] **Matheron** — La théorie des variables régionalisées, et ses applications, C. M. M. de Fontainebleau, Fascicule 5, 1970.
- [3] **Journel** — Guide pratique de géostatistique minière, C. M. M., Fontainebleau, 1975.
- [4] **David** — Geostatistical ore reserve estimation, Rapport EP-75-R, Ecole Polytechnique de Montreal, 1975.
- [5] **Marechal** — Géostatistique et applications minières, *Annales des Mines*, Novembre 1975, p. 27-38.
- [6] **Muge, Cortez, Pereira** — Apontamentos de Geoestatística, IST, Lisboa, 1975.
- [7] **Damay** — Application de la géostatistique au niveau d'un groupe minier, proceedings of Nato ASI Geostat 75, Rome.
- [8] **Damay** — L'ingénieur des mines et la recherche opérationnelle, *Revue de l'Industrie Minière*, Mars 1975, p. 127-133.
- [9] **Krige** — A review of the development of geostatistics in South Africa, proceedings of Nato ASI Geostat 75, Rome.
- [10] **Rutledge** — The potential of geostatistics in the development of mining, proceedings of Nato ASI Geostat 75, Rome.
- [11] **Berry, Guarascio, Sciotti** — Analisi geostatistica del grado di fratturazione della roccia per la previsione del rendimento in blocchi in cave di tufo litoide, proceedings do 1.º Convegno Internazionale sulla coltivazione di pietre e minerali litoidi, Torino, Otto, 1974.
- [12] **David, Dagbert** — Lakeview revisited: variograms and correspondence analysis — new tools for the understanding of geochemical data, Ecole Polytechnique de Montreal, 1975.
- [13] **Delhomme, Delfiner** — Application du krigeage à l'optimisation d'une campagne pluviométrique en zone aride, C. M. M., Fontainebleau, 1973.
- [14] **Chilès** — How to adapt kriging to non-classical problems: three cases studies, proceedings of Nato ASI Geostat 75, Rome.
- [15] **Monget, Bordet** — Le variogramme, revelateur de structure d'un champ bidimensionnel, C. M. M., Fontainebleau, 1972.
- [16] **Clark** — An application of geostatistics to time series data, proceedings of Nato ASI geostat 75, Rome.
- [17] **Krige** — Some basic considerations in the applications of geostatistics to the valuation of ore in South African Gold Mines *J. South Af. Inst. of Min. and Met.*, April 1976, p. 383-391.
- [18] **Matheron** — Le Krigeage Universel, C. M. M. de Fontainebleau, Fascicule 1, 1969.
- [19] **Rogado, Pereira, Muge, Cortez** — Comments on the feasibility report of the TETELO project, unpublished report, Lisboa 1974.
- [20] **Cortez, Pereira, Muge** — Tratamento Geoestatístico de parâmetros mineiros, I Congresso Luso-Hispano-Americano de Geologia Económica, Lisboa-Madrid, 1971.
- [21] **Cortez, Muge, Pereira** — Ore reserve estimation of a gold orebody with imbricated structures, 12<sup>th</sup> APCOM, Golden, 1974.
- [22] **Rogado, Cortez, Pereira, Muge** — Avaliação da reserva mineral e parametrização do projecto METAGO, relatório não publicado para PAA/EIM, Lisboa, 1976.